مقدمهٔ ناشر

سلام

اولین باری که اسم «ریاضیات گسسته» را شنیدید به چه فکری افتادید؟! آدم اولش فکر می‌کند که با ریاضیاتی سروکار دارد که از همه چیز، از دنیا و از عقبا، گسسته است، رفته کناری نشسته و با قضیه‌ها و مسئله‌هایش خوش است. اما خب، اصلاً این‌طور نیست. بحث‌های ریاضیات گسسته نه تنها از دنیا نگسسته، بلکه خیلی هم کاربرد دارد. گراف، ترکیبیات، نظریهٔ اعداد، احتمال و... همه از ابزارهایی هستند که در خیلی رشته‌های دیگر کاربرد دارند. فکر می‌کنم باور نمی‌کنید، می‌گویید معلم‌ها کم بودند! این نویسنده‌ها و ناشران هم شروع کرده‌اند به نصیحت که ریاضی خیلی کاربرد دارد و به دردتان می‌خورد و ... !

اما بگذارید یک کم توضیح بدهم، شاید علاقه‌مند شدید:

فکر می‌کنم همهٔ شماهایی که این کتاب را می‌خوانید در یکی از شبکه‌های اجتماعی، حالا از نوع وطنی‌اش یا خارجی، عضو هستید. از اَپ، اینترنت و... هم خیلی استفاده می‌کنید. همین موضوع‌هایی که امسال در درس ریاضیات گسسته‌تان می‌خوانید، مثلاً نظریهٔ گراف و ترکیبیات، در طراحی نرم‌افزارها و برنامه‌ریزی این چیزهایی که گفتم خیلی کاربرد دارند. اصلاً اگر این نظریه‌ها نبود، این چیزها این‌قدر که می‌بینید پیشرفت نمی‌کرد. همهٔ موضوع این است که وقتی می‌گوییم کاربرد منظورمان این نیست که بلافاصله بعد از این که درس را خواندید می‌توانید در زندگی به کارش ببرید. برای استفاده از هر کدام از این‌ها کلی سعی دیگر هم لازم است. کار خدا را چه دیده‌اید، شاید هر کدوم از شما در آینده‌ای نزدیک بشوید طراح، سازنده یا برنامه‌ریز یکی از همین‌ها. شاید مستقل از هر رشتهٔ دانشگاهی که می‌خوانید آخرِ سر، کارتان بیفتد به دنیای دیجیتال و اینترنت و... تازه اگر حتی زمینهٔ کارتان این‌ها نباشد احتمالاً برای بازاریابی، تبلیغات و فروش و... باز هم درگیر همین چیزها می‌شوید؛ پس نتیجه می‌گیریم اتفاقاً این ریاضیات گسسته نه تنها گسسته نیست بلکه خیلی هم به ما و زندگی‌مان پیوسته است.

مؤلف خوبمان، آقای دیداری، با دانش ، تجربه و دقتی بی‌نظیر این کتاب را نوشته تا خیالتان از بابت یادگیری این درس راحت باشد. الان که دارم این مقدمه را می‌نویسم از بابت خوب‌بودن کتاب خیالم راحت است اما باز هم، چون نظر شما که از این کتاب استفاده می‌کنید، برایمان بسیار مهم است و اول و آخر کیفیت کتاب به نظر شما برمی‌گردد، لطفاً برایمان بنویسید که چه‌طور بود؟ چه چیزهایی کم دارد؟ چه چیزهایی زیاد دارد و چگونه می‌تواند بهتر شود؟ منتظریم.

خوش باشید

مقدمهٔ مؤلف

به نام او

چون حسابی درگیر کار بودم وقت نمی‌کردم برم دانشگاه! هر از گاهی سری می‌زدم تا ببینم چه خبر است. درس نظریهٔ اعداد داشتم. آخرهای ترم بود. رفتم دانشگاه و ته کلاس نشستم. استاد وسط درس‌دادن یک دفعه گفت: «اون ته کلاس، سینما نیستش ها» راستش را بخواهید خیلی بهم برخورد.۲۰ دقیقه گذشت. استاد گفت: کی فلان قضیه را خوانده است که سمینار بدهد؟ (سیستمش بیشتر سمیناری بود و خیلی درس نمی‌داد) کسی دست بالا نبرد. از شانس، من این قضیه را حدود شش ماه پیش برای کلاسی خوانده بودم ولی خب اثباتش زیاد یادم نبود. آن حرف استاد هم هنوز توی گوشم بود. گفتم: خدایا برم نرم؟ از یک طرف اثباتش بود و از یک طرف قصهٔ حال‌گیری! خلاصه دل را به دریا زدم و دست بالا کردم. کمی تعجب کرد. بالأخره اولین جلسهٔ حضور من بود. رفتم آن جلو نفس عمیقی کشیدم ولی هر کاری کردم دیدم نه خیر! چیزی یادم نمی‌آید؛ (حالا استرس و ...) پیش خودم گفتم از این ستون به آن ستون فرج است فعلاً صورت قضیه را پای تخته بنویسم شاید چیزی یادم آمد. نوشتم و دیدم نه مثل این‌که قضیه جدی است و چیزی یادم نمی‌آید! یک دفعه چیزی به ذهنم رسید. کتاب را بستم و گفتم: «خب ایده برای اثبات بدهید! اثبات که در کتاب هست. من برای شما رونویسی کنم فایده‌ای ندارد! دانشجوها شروع به اعتراض کردند ولی استاد از این حرف من خوشش آمد و گفت: «خب راست می‌گوید اگر پای تخته تندتند بنویسد که فایده‌ای ندارد. خلاصه این‌ها یک چیزی می‌گفتند و من هم کمی بحث می‌کردم و زیر زیرکی هم کتاب را نگاه می‌کردم. بالأخره هر جوری بود اثبات را تمام کردم. (البته به دلم نچسبید. جلسه بعد یه موضوع دیگه رو خیلی معلمی و به همون صورت بحث دوطرفه با دانشجوها سمینار دادم. استاد هم خیلی حال کرد و وسطش شروع کرد تعریف و تمجید و پایان ترم هم بدون این‌که ورقه‌ام رو تصحیح کنه تنها ۲۰ لیسانسمو داد).

غرضم از نقل این خاطره، آن جملهٔ قصاری بود که گفتم! اکثراً می‌پرسید: آقا چه جوری باید سؤال‌های ریاضی را حل کنیم؟ اگر سوال حل شد که کارتان درست است ولی اگر نشد تکلیف چیست؟ این‌جا نباید جواب را سریع از روی پاسخ‌نامه ببینید! خودتان را دست کم نگیرید. به ذهنتان مهلت بدهید. سعی کنید ارتباطی بین چیزهایی که می‌دانید و چیزهایی که باید به دست آورید برقرار کنید. مثال‌های حل‌شدهٔ جزوهٔ معلم یا درس‌نامهٔ کتاب‌ها را ببینید و راه حل را تا جایی که می‌توانید جلو بروید. اگر هنوز به جواب نرسیدید حالا اشکالی ندارد، پاسخ را ببینید. اگر همهٔ این مراحل را طی کرده باشید یک «آهان اشکالم این‌جا بوده» به خود خواهید گفت. این‌جا است که من به شما تبریک می‌گویم چون یادگیری شما کامل شده است. در مورد اهمیت نهایی و معدل فکر می‌کنم همهٔ شما این‌قدر شنیده‌اید که بهتر است حرفی نزنم پس بهتر است چند کلمه در مورد این کتاب بگویم. این کتاب از بخش‌های زیر تشکیل شده است:

درس‌نامه: سعی کردم خیلی روان و ساده (البته کامل) درس را آموزش دهم. مطالب اضافه که به درد نهایی نمی‌خورد در این کتاب نمی‌بینید اما هر چیزی که برای کسب ۲۰ نهایی لازم دارید بیان شده است پس به نظرم یک بار هم شده درس‌نامه را به دقت مطالعه کنید. چینش درس‌ها کاملاً مثل کتاب درسی است البته در برخی موارد برای این‌که درس طولانی نشود و حوصله‌تان سر نرود درس ممکن است به چند بخش تقسیم شده باشد و سؤال‌های هر قسمت آورده شده باشد. همهٔ کادرهای صورتی‌رنگ کتاب درسی که به صورت جای خالی هم در امتحان می‌آید در کتاب پوشش داده شده است.

جدول‌های خلاصه: در پایان هر موضوع کل درس را در یک جدول خلاصه کرده‌ام. شب‌های امتحان از این‌ها غافل نشوید.

در امتحان نهایی چه خبر: بچه‌ها حجم درس‌ها زیاد است پس تا می‌توانید مطالب را تیپ‌بندی‌شده و منظم به خاطر بسپارید. من سعی کرده‌ام این کار را برای شما انجام بدهم و تیپ‌های مهم امتحانی به همراه نمونه‌سؤال‌های آن را در هر قسمت بیان کنم.

سؤال‌های امتحانی: همهٔ مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی و کار در کلاس و ملاس! و سؤال‌های نهایی سال‌های قبل و سال‌های بعد! را در این قسمت به صورت کاملاً دسته‌بندی‌شده برای شما آورده‌ام. اگر کتاب را از اول سال تهیه کرده‌اید که خورد خورد همه را حل کنید و جلو بیایید اما اگر نزدیک نهایی هستید بیشتر روی سؤال‌های مشابه کتاب درسی و نهایی‌ها تمرکز کنید. سؤال‌هایی که کنار آن‌ها علامت موشک است مقداری بالاتر از کتاب درسی بوده و برخی از آن‌ها نیز تست کنکور بوده‌اند. چون ممکن است در آینده، تست هم در سؤال‌های نهایی بیاید یا معلم شما آزمون ترم اول را تستی بگیرد خوب است به این‌ها توجه کنید. (به درد کنکورتون هم می‌خوره!)

آزمون‌های انتهایی هر فصل: بعد از تمام‌شدن هر فصل خوب است خودتان را با یک آزمون نسبتاً دشوار محک بزنید. اگر در حل سؤال‌ها اشکالات زیادی داشتید بدانید که باید دوباره به درس‌نامه و سؤال‌های امتحانی مراجعه کنید.

پاسخ‌های تشریحی: بعد از حل سؤال‌ها (با آن متدی که گفتم البته) حتماً پاسخ‌ها را تحلیل کنید حتی شما دوست عزیز که سؤال را درست حل کرده‌اید!

آزمون‌های پایانی کتاب: در انتهای کتاب دو آزمون ترم اول داریم و چهارتا هم نهایی. این‌ها دیگر از نون شب واجب‌تر است. به‌خصوص برای امتحان نهایی حتماً کلید نهایی را ببینید و دقت کنید که بارم به چه قسمت‌هایی اختصاص پیدا کرده است.

در پایان تشکر می‌کنم از همهٔ مسئولین و برو بچه‌های خیلی‌سبزی. از آقای هاشمی و خانم جالینوس که زحمت زیادی برای این کتاب کشیدند و از آقایان علیرضا کاظمی‌بقا، ماهان فنی‌فر، نیما فیض‌آقایی، امیرحسین ابومحبوب و ابولفضل ناصری و از شاگردان خوبم آرمیتا شیرخانی و ریحانه سجادی و فاطمه فتاحیان که با صبر و حوصله کتاب را خواندند و اشکالات آن را درآوردند. بخوانید و حالش را ببرید و ۲۰ بگیرید و علاقمند گسسته شوید و به رشتهٔ کامپیوتر! بروید و ... .

دوست‌دار شما دیداری

فهرست

فصل اول: آشنایی با نظریهٔ اعداد

فصل دوم: گراف و مدل‌سازی

فصل سوم: ترکیبیات (شمارش)

امتحانات

فصل ۱: آشنایی با نظریهٔ اعداد

بخش ۱: استدلال ریاضی

گزاره: به هر جملهٔ خبری که درست یا نادرست باشد، گزاره می‌گوییم. درستی گزاره‌های نادرست را با مثال نقض رد می‌کنیم و گزاره‌های درست را هم با چهار روش، اثبات می‌کنیم.

- گزاره
  - نادرست
    - مثال نقض
  - درست
    - اثبات مستقیم
    - اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها
    - اثبات غیرمستقیم
    - اثبات بازگشتی

مثال نقض

مثال نقض: مثالی که نشان می‌دهد نتیجه‌گیری یا حدس کلی نادرست است.

مثلاً برای این‌که نشان دهیم گزارهٔ «عدد $۲^n + ۳$ به ازای هر عدد طبیعی n ، اول است.» نادرست است، کافی است $n = ۵$ قرار دهیم، چون $۲^۵ + ۳ = ۳۵$ می‌شود که اول نیست.

نکته: برای ارائهٔ مثال نقضِ گزاره‌های شرطی، باید مثالی ارائه کنیم که در فرض، درست دربیاید ولی حکم را نقض کند.

مثال: ارزش گزارهٔ «جمع هر دو عدد گنگ، گنگ است.» را تعیین کنید. *(نهایی خرداد ۹۹)*

پاسخ: اگر بخواهیم نشان دهیم که گزاره نادرست است باید دو عدد گنگ پیدا کنیم (توجه کن به نکته) که جمع آن‌ها گنگ نباشد؛ مثلاً $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ هر دو گنگ هستند، ولی $\sqrt{۲} + (-\sqrt{۲}) = ۰$ می‌شود که گویا است.

مثال: نشان دهید گزارهٔ «برای هر عدد طبیعی n ، عدد $۲^{۲^n} + ۱$ اول است.» نادرست است.

پاسخ: باید یک عدد n پیدا کنیم به طوری که به ازای آن $۲^{۲^n} + ۱$ اول نباشد. به ازای $n = ۱,۲,۳,۴$ حاصل $۲^{۲^n} + ۱$ به ترتیب برابر ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ می‌شود که همگی اول هستند، دقت کنید که وقتی پرانتز نداریم باید از توان بالا شروع کنیم مثلاً اگر $n = ۳$ باشد $۲^{۲^۳} + ۱ = ۲^۸ + ۱ = ۲۵۷$ می‌شود. اویلر نشان داد که به ازای $n = ۵$ حاصل $۲^{۲^۵} + ۱$ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است، یعنی اول نیست. یادتان باشد، مثال نقض این گزاره $n = ۵$ است.

اثبات مستقیم

با مثال‌آوردن نمی‌توانیم چیزی را اثبات کنیم. کتاب چهار روش برای اثبات درستی یک گزاره ارائه کرده است که اولین آن‌ها اثبات مستقیم است.

اثبات مستقیم: روش اثباتی است که در آن به صورت مستقیم از درستی فرض به درستی حکم می‌رسیم.

مثلاً برای این‌که ثابت کنیم جمع عدد زوج با عدد فرد، فرد است؛ داریم:

ابتدا عدد زوج را $۲k$ و عدد فرد را $۲k' + ۱$ می‌گیریم. $(k , k' \in \mathbb{Z})$

حالا:

$$۲k + ۲k' + ۱ = ۲(\underbrace{k + k'}_{q}) + ۱ = ۲q + ۱$$

جمع دو عدد به صورت $۲q + ۱$ درآمد، یعنی فرد است. حالا دیگر مطمئن هستیم که جمع عدد فرد با عدد زوج، همواره فرد می‌شود.

توجه: دقت دارید که چون k لزوماً با k' یکسان نیست، آن‌ها را متفاوت (یعنی k و k') می‌گیریم و هر دو را k نمی‌گیریم.

نکته: برای این‌که از اثبات مستقیم استفاده کنیم باید شکل اعداد را به درستی در نظر بگیریم:

دو عدد متوالی	n و $n + ۱$
دو عدد زوج متوالی	$۲n$ و $۲n + ۲$
دو عدد فرد متوالی	$۲n + ۱$ و $۲n + ۳$
عدد گویا	$\frac{a}{b} (a, b \in \mathbb{Z}, b \neq ۰)$

عدد زوج	$۲k$
عدد فرد	$۲k + ۱$
دو عدد زوج	$۲k$ و $۲k'$
دو عدد فرد	$۲k + ۱$ و $۲k' + ۱$

مثال: ثابت کنید جمع پنج عدد طبیعی متوالی بر ۵ بخش‌پذیر است.

پاسخ: اولین عدد طبیعی را n می‌گیریم. بعدی می‌شود $n+1$. بعدی $n+2$ و ... پس داریم:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5n+10=5\underbrace{(n+2)}_{q}=5q$$

جمع این ۵تا عدد به صورت $5q$ درآمد (۵ *ضرب در یه عدد صحیح*) پس مضرب ۵ است.

مثال: نشان دهید تفاضل مربعات دو عدد فرد متوالی، همواره بر ۸ بخش‌پذیر است.

پاسخ: تفاضل مربعات یعنی تفاضل دوتا مربع! عدد فرد اول را $2k+1$ می‌گیریم. چون گفته فرد متوالی، عدد فرد بعدی *(دوتا بیشتره)* به صورت $2k+3$ می‌شود. حالا داریم:

$$(2k+3)^2-(2k+1)^2=(4k^2+12k+9)-(4k^2+4k+1)=8k+8=8\underbrace{(k+1)}_{q}=8q$$

مثال: الف) ثابت کنید اگر به ۴ برابر ضرب دو عدد طبیعی متوالی، یک واحد اضافه کنیم، حاصل به صورت مربع کامل درمی‌آید.
ب) ثابت کنید اگر $4k+1$ مربع کامل باشد، k حاصل‌ضرب دو عدد متوالی است.

پاسخ: الف ضرب دو عدد طبیعی متوالی به صورت $n(n+1)$ می‌شود. حالا باید ثابت کنیم $4n(n+1)+1$ به صورت توان دوم یک عدد طبیعی است:

$$4n(n+1)+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$$

پس فهمیدیم «اگر k، حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $4k+1$ مربع کامل است.».

ب فرض این است که $4k+1$ مربع کامل است، پس آن را a^2 می‌گیریم:

$$4k+1=a^2 \Rightarrow k=\frac{a^2-1}{4}=\frac{a-1}{2}\times\frac{a+1}{2}$$

$4k+1$ فرد است پس a^2 نیز عددی فرد و a هم فرد است پس $a-1$ و $a+1$ زوج بوده است. کسرها عددی صحیح هستند، همچنین $\frac{a+1}{2}$ و $\frac{a-1}{2}$ دو عدد متوالی هستند؛ چون اختلاف آن‌ها یک واحد است.

اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها در روش اثبات مستقیم معمولاً گفته n فرد باشد چنین می‌شود یا n زوج باشد چنان می‌شود اما فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم «برای هر عدد طبیعی n، حاصل n^2-3n+7 عددی فرد است.». بالأخره این n از دو حالت، خارج نیست *(به اسم روش دقت کن!)* یا فرد است یا زوج. این دو حالت را جداگانه برویم جلو تا در هر کدام به $2q+1$ برسیم:

۱) n زوج $\Rightarrow n=2k \Rightarrow n^2-3n+7=(2k)^2-3(2k)+7=4k^2-6k+6+1=2\underbrace{(2k^2-3k+3)}_{q}+1=2q+1$

۲) n فرد $\Rightarrow n=2k+1 \Rightarrow n^2-3n+7=(2k+1)^2-3(2k+1)+7=4k^2+4k+1-6k+4=4k^2-2k+4+1$

$$=2\underbrace{(2k^2-k+2)}_{q}+1=2q+1$$

روش اثبات در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها: مسئله را به چند حالت که در ضمن همهٔ حالت‌ها را پوشش دهد تقسیم می‌کنیم و در هر کدام، ثابت می‌کنیم که حکم نتیجه می‌شود.

هم‌ارزی روش همهٔ حالت‌ها: در مثال بالا، زوج‌بودن n را با p و فردبودن را با q و فردبودن n^2-3n+7 را با r نمایش می‌دهیم. می‌خواهیم ثابت کنیم اگر p یا q برقرار باشد به r می‌رسیم یعنی: $p\vee q \Rightarrow r$. به جای آن، ثابت کردیم هم از p به r می‌رسیم و هم از q به r؛ یعنی: $(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$
در اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها از هم‌ارزی مقابل استفاده می‌کنیم: $p\vee q \Rightarrow r\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$

نکته: شبیه بالا و در حالت کلی برای این‌که حکم q را ثابت کنیم، می‌توانیم فرض را به n گزارهٔ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ تقسیم کرده و از هم‌ارزی مقابل استفاده کنیم: $(p_1\vee p_2\vee\ldots\vee p_n)\Rightarrow q\equiv(p_1\Rightarrow q)\wedge(p_2\Rightarrow q)\wedge\ldots\wedge(p_n\Rightarrow q)$

مثال: ثابت کنید: الف) ضرب دو عدد طبیعی متوالی همواره زوج است. ب) نشان دهید مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.
(نهایی خرداد ۹۹ و دی ۱۴۰۰)

پاسخ: الف باید ثابت کنیم $n(n+1)$ همیشه زوج است. دو حالت می‌گیریم:

۱) n زوج $\Rightarrow n=2k \Rightarrow n(n+1)=2\underbrace{k(2k+1)}_{q}=2q$

۲) n فرد $\Rightarrow n=2k+1 \Rightarrow n(n+1)=(2k+1)\overbrace{(2k+2)}^{2(k+1)}=2\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{q}=2q$

در هر دو حالت شد $2q$، پس n چه زوج باشد چه فرد، $n(n+1)$ زوج می‌شود.

ب عدد فرد را $۲k+۱$ می‌گیریم:

گفته ثابت کنید مربع این عدد به صورت $۸q+۱$ درمی‌آید:

$$(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱=۴\underbrace{k(k+۱)}+۱=۴(۲q)+۱=۸q+۱$$

طبق (الف) ضرب دو عدد متوالی زوج است.

تذکر: بچه‌ها گزارهٔ (ب) را حفظ باشید. البته در درس بعدی آن را یک‌جور دیگر هم ثابت می‌کنیم.

مثال: نشان دهید اگر $S=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$، $A=\{۳,۴,۷\}$، $n\in S$ و عدد $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ زوج باشد، آن‌گاه $n\in A$.

پاسخ: کل اعدادی که n می‌تواند باشد از ۲ تا ۷ است؛ پس بیایید این‌ها را امتحان کنیم تا ببینیم چه موقع $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ زوج می‌شود:

$n=۲ \Rightarrow \frac{۴\times۹}{۴}=۹$ ✗

$n=۳ \Rightarrow \frac{۹\times۱۶}{۴}=۳۶$ ✓

$n=۴ \Rightarrow \frac{۱۶\times۲۵}{۴}=۱۰۰$ ✓

$n=۵ \Rightarrow \frac{۲۵\times۳۶}{۴}=۲۲۵$ ✗

$n=۶ \Rightarrow \frac{۳۶\times۴۹}{۴}=۹\times۴۹$ ✗

$n=۷ \Rightarrow \frac{۴۹\times۶۴}{۴}=۱۶\times۴۹$ ✓

پس می‌بینید اگر $n=۳,۴,۷$ باشد، عبارت داده‌شده زوج می‌شود؛ یعنی $n\in A$.

نکته: اگر عبارت $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ زوج باشد، n به یکی از دو صورت $n=۴k$ یا $n=۴k+۳$ می‌تواند باشد. (دقت کنید اعداد ۳ و ۷ به صورت $۴k+۳$ و عدد ۴ به صورت $۴k$ است.)

مثال: ثابت کنید حاصل‌ضرب ۳ عدد طبیعی متوالی همواره بر ۳ بخش‌پذیر است.

پاسخ: سه عدد طبیعی متوالی را می‌توانیم n، $n+۱$ و $n+۲$ بگیریم. باید ثابت کنیم $n(n+۱)(n+۲)=۳q$. این‌جا زوج و فرد در نظر گرفتن n به درد نمی‌خورد اما اگر n را بر ۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده‌ای برابر ۰، ۱ یا ۲ می‌تواند داشته باشد، پس سه حالت در نظر می‌گیریم:

۱) $n=۳k$ باشد. در این حالت:

$$n(n+۱)(n+۲)=۳\underbrace{k(۳k+۱)(۳k+۲)}_{q}=۳q$$

۲) $n=۳k+۱$ باشد. این‌جا هم:

$$n(n+۱)(n+۲)=(۳k+۱)(۳k+۲)\underbrace{(۳k+۳)}_{۳(k+۱)}=۳\underbrace{(۳k+۱)(۳k+۲)(k+۱)}_{q}=۳q$$

۳) $n=۳k+۲$ باشد. این‌جا هم:

$$n(n+۱)(n+۲)=(۳k+۲)\underbrace{(۳k+۳)}_{۳(k+۱)}(۳k+۴)=۳\underbrace{(۳k+۲)(k+۱)(۳k+۴)}_{q}=۳q$$

پس ضرب سه عدد متوالی، همیشه مضرب ۳ است. در مثال قبلی ثابت کردیم مضرب ۲ هم است، پس ضرب ۳ عدد متوالی، همواره بر ۶ بخش‌پذیر است.

نکته: اگر سه عدد طبیعی متوالی را به صورت $n-۱,n,n+۱$ نمایش بدهیم، داریم: $(n-۱)(n)(n+۱)=n^۳-n$ یعنی $n^۳-n$ همیشه بر ۶ بخش‌پذیر است.

مثال: ثابت کنید اگر a بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، آن‌گاه $a^۲=۳q+۱$. سپس نتیجه بگیرید به ازای هر دو عدد صحیح x و y عبارت $xy(x^۲-y^۲)$ همواره بر ۳ بخش‌پذیر است.

پاسخ: با روش در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها برویم. در مثال قبلی گفتیم a در تقسیم بر ۳ سه حالت می‌تواند داشته باشد، ولی چون گفته a مضرب ۳ نیست، پس فقط دو حالت می‌ماند:

۱) $a=۳k+۱$ باشد:

$$a^۲=(۳k+۱)^۲=۹k^۲+۶k+۱=۳\underbrace{(۳k^۲+۲k)}_{q}+۱=۳q+۱$$

۲) $a=۳k+۲$ باشد:

$$a^۲=(۳k+۲)^۲=۹k^۲+۱۲k+\underbrace{۴}_{۳+۱}=۳\underbrace{(۳k^۲+۴k+۱)}_{q}+۱=۳q+۱$$

پس اگر a مضرب ۳ نباشد، $a^۲$ به صورت $۳q+۱$ است. حالا اگر از x و y حداقل یکی بر ۳ بخش‌پذیر باشد، $xy(x^۲-y^۲)$ بر ۳ بخش‌پذیر است، اما اگر هیچ‌کدام بر ۳ بخش‌پذیر نباشند، طبق چیزی که الان ثابت کردیم مربع هر دو به صورت $۳q+۱$ هستند؛ پس:

$$xy(x^۲-y^۲)=xy(۳q+۱-(۳q'+۱))=xy(۳(q-q'))=۳t$$

اثبات غیرمستقیم (برهان خلف)

گفتیم که هر گزاره یا درست است یا نادرست. حالا اگر من به شما بگویم یک گزاره نمی‌تواند نادرست باشد، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

بله نتیجه می‌گیریم درست است. این اساس روش برهان خلف یا اثبات غیرمستقیم است. روش کار به این صورت است که:

۱ خلاف حکم *(دقت کردی خلاف حکم)* را در نظر می‌گیریم. **یعنی فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد.**

۲ با قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست به **یک نتیجهٔ غیرممکن یا نتیجهٔ متضاد با فرض** می‌رسیم.

۳ فرضِ نادرست‌بودن حکم باطل بوده و درستی خود حکم ثابت می‌شود.

مثلاً می‌خواهیم ثابت کنیم: $\underbrace{\text{اگر } r \text{ عدد گویای ناصفر و } x \text{ عددی گنگ باشد،}}_{\text{فرض}}$ $\underbrace{\text{آن‌گاه } rx \text{ گنگ است.}}_{\text{حکم}}$ *(نهایی خرداد ۱۴۰۲)*

۱ خلاف حکم را در نظر می‌گیریم یعنی فرض کنیم rx گویا باشد، پس $rx = a$ که a گویا است.

۲ $x = \frac{a}{r}$ اما تقسیم دو عدد گویا $\left(\frac{a}{r}\right)$ که مخرج هم صفر نیست گویا است، پس x گویا است.

۳ به تناقض رسیدیم (ثابت کردیم x گویا است در صورتی که x گنگ بود)، پس خلاف حکم، باطل و خود حکم درست است.

مثال: ثابت کنید جمع عددی گویا با عددی گنگ، گنگ می‌شود.

پاسخ: فرض کنید a عددی گویا و x عددی گنگ باشد. گفته ثابت کنید $a+x$ گنگ است (حکم). باید خلاف حکم را در نظر بگیریم. یعنی «$a+x$ گنگ نیست، یعنی گویا است» حالا باید این را به تناقض برسانیم.

$a+x$ گویا است، پس برابر با عدد گویایی مثل b می‌شود. حالا: $a+x=b \Rightarrow x=b-a$

با اثبات مستقیم به راحتی ثابت می‌شود جمع، تفریق، ضرب و تقسیم *(مخرج صفر نباشه)* دو عدد گویا، گویا است *(جمع دو تا کسر گویا، کسر گویا میشه)* پس $b-a$ گویا است. از طرفی طبق فرض x گنگ بود. این یعنی به تناقض رسیده‌ایم. پس خلاف حکم (فرض خلف)، باطل و در نتیجه خود حکم درست است. **معمولاً برای اثبات گنگ‌بودن اعداد از برهان خلف استفاده می‌کنیم.**

نکته: در مورد گویا یا گنگ بودن جمع، تفریق و ضرب اعداد داریم:

	جمع و تفریق (نوع اثبات)	ضرب
هر دو گویا	گویا (اثبات مستقیم)	گویا (اثبات مستقیم)
یکی گویا و یکی گنگ	گنگ (برهان خلف)	(اگر عدد گویا صفر باشد، صفر ولی ضرب گویای ناصفر در گنگ، گنگ است.)
هر دو گنگ	ممکن است گنگ یا گویا	ممکن است گنگ یا گویا

مثال: نشان دهید اگر n^2 فرد باشد، آن‌گاه n هم فرد است.

پاسخ: خلاف حکم می‌شود «n فرد نیست»، یعنی n زوج است؛ پس:

$$n=2k \Rightarrow n^2=4k^2=2\underbrace{(2k^2)}_{q}=2q$$

پس نتیجه می‌گیریم n^2 زوج است در صورتی که فرض می‌گوید n^2 فرد است، پس به تناقض رسیده‌ایم. پس خلاف حکم (فرض خلف)، باطل و خود حکم درست است.

مثال: a,b,c,d چهار عدد طبیعی فرد هستند. نشان دهید معادلهٔ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$ جواب ندارد.

پاسخ: فرض کنیم معادله، دارای جواب باشد، یعنی اعداد فرد a,b,c,d وجود داشته باشند که در معادله صدق کنند.

با مخرج‌مشترک‌گیری داریم:

$$\frac{bcd+acd+abd+abc}{abcd}=1 \Rightarrow bcd+acd+abd+abc=abcd$$

چون a,b,c,d فرد هستند $abcd$ فرد می‌شود. از طرفی عبارت‌های سمت چپ نیز همگی فرد هستند، اما جمع چهار عدد فرد، زوج می‌شود. این یعنی به تناقض رسیده‌ایم چون سمت راست فرد ولی سمت چپ عددی زوج است، بنابراین فرض خلف باطل بوده و معادله در اعداد طبیعی فرد، جواب ندارد.

مثال: نشان دهید اگر a^2+b^2 فرد باشد، آن‌گاه a فرد است یا b فرد است.

پاسخ: حکم گفته «a فرد یا b فرد». اگر بخواهیم با برهان خلف خلاف حکم برویم با استفاده از قانون دمورگان می‌شود «a زوج و b زوج»، *(یادتونه دیگه* $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$*)* حالا:

$$a=2k, b=2k' \Rightarrow a^2+b^2=4k^2+4k'^2=2\underbrace{(2k^2+2k'^2)}_{q}=2q$$

این یعنی a^2+b^2 زوج می‌شود در صورتی که فرض می‌گوید فرد است. تناقض حاصل، می‌گوید فرض خلف باطل و خود حکم درست است.

مثال: a_1، a_2 و a_3 عددهای صحیح (مثل ۱، ۲ و ۳) هستند و b_1، b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری (مثل ۲، ۳ و ۱) هستند. ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ زوج است.

پاسخ: فرض کنیم $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ زوج نباشد، یعنی فرد باشد. ضرب ۳ عدد ، فرد شده است، پس هر سه‌تا فرد بوده‌اند، یعنی a_1-b_1، a_2-b_2 و a_3-b_3 همگی فرد بوده‌اند. جمع سه عدد فرد، فرد می‌شود، یعنی $A=a_1-b_1+a_2-b_2+a_3-b_3$ فرد است. از طرفی $A=a_1-b_1+a_2-b_2+a_3-b_3=(a_1+a_2+a_3)-(b_1+b_2+b_3)$ و $b_1+b_2+b_3=a_1+a_2+a_3$ می‌شود، پس $A=0$ شده، یعنی A زوج است. این تناقض نشان می‌دهد فرض خلف باطل و $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است.

نکته: دقیقاً با همین روش می‌توانستیم ثابت کنیم $(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)$ نیز زوج است. چون اگر فرض کنیم فرد است باید $A=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)$ فرد باشد، اما:

$$A=\underbrace{(a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)}_{\text{مساوی هم}}=\underbrace{2(a_1+a_2+a_3)}_{\text{زوج}}$$

اثبات با گزاره‌های همارز (اثبات بازگشتی)

دو گزارهٔ همارز: دو گزارهٔ P و Q را همارز گوییم هرگاه ارزش یکسانی (هر دو درست یا هر دو نادرست) داشته باشند.

ترکیب دوشرطی: ترکیب دوشرطی دو گزاره را به صورت $p \Leftrightarrow q$ نمایش می‌دهیم. این گزاره وقتی درست است که p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند. به عبارت دیگر ارزش‌های یکسانی داشته باشند.

حالا یک سؤال: اگر $p \Leftrightarrow q$ درست و q هم درست باشد، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ معلوم است که p هم باید درست باشد. اگر $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r \Leftrightarrow s$ درست و s هم درست باشد، نتیجه می‌گیریم r، q و p همارزش‌اند و چون s درست است پس r، q و p هم درست می‌شوند. اساس کار اثبات با گزاره‌های همارز (یا اثبات بازگشتی) همین است. مثلاً می‌خواهیم ثابت کنیم:

«برای هر دو عدد مثبت a و b داریم: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$» *(همین دو بار تا حالا تو نهایی اومده)*

یک مخرج‌مشترک می‌گیریم: $\frac{a^2+b^2}{ab}\ge 2$. چون $ab>0$، با ضرب دو طرف در آن داریم $a^2+b^2\ge 2ab$ و با بردن $2ab$ به طرف دیگر: $a^2+b^2-2ab\ge 0$ خب $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$ پس می‌شود $(a-b)^2\ge 0$. پس تا این‌جا شد:

$$\underbrace{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2}_{p}\Leftrightarrow\underbrace{\frac{a^2+b^2}{ab}\ge 2}_{q}\xleftrightarrow{ab>0}\underbrace{a^2+b^2\ge 2ab}_{r}\Leftrightarrow\underbrace{a^2+b^2-2ab\ge 0}_{s}\Leftrightarrow(a-b)^2\ge 0$$

$(a-b)^2\ge 0$ همواره درست است. تمام ترکیب‌های دوشرطی هم درست هستند پس تمام گزاره‌های s، r، q و p هم درست هستند. حکم هم همان p بود که درستی آن ثابت شد.

روش اثبات حکم p با گزاره‌های همارز (اثبات بازگشتی): سعی می‌کنیم با اعمال دوطرفهٔ ضرب، تقسیم، جمع و تفریق، ترکیب‌های درست دوشرطی $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r$ بسازیم تا جایی که به یک رابطهٔ همواره درست برسیم. چون آخرین گزاره همواره درست و ترکیب‌های دوشرطی هم درست هستند. پس هم گزاره‌ها همارزش بوده و هم حکم p درست می‌شود *(یعنی ثابت می‌شه)*.

نکته: درستی نامساوی‌ها معمولاً به روش گزاره‌های همارز (اثبات بازگشتی) ثابت می‌شود.

مثال: برای هر دو عدد حقیقی a,b ثابت کنید $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$. *(نهایی دی ۹۷ و شهریور ۹۸)*

پاسخ: از گزاره‌های همارز کمک می‌گیریم و سعی می‌کنیم حکم را به یک عبارت همواره درست برسانیم. عبارت‌های همواره درستی که در این‌جا ظاهر می‌شوند معمولاً به صورت جمع چند عبارت درجه‌دوم است. در اتحاد مربع، $2ab$ ظاهر می‌شود پس ضرب دو طرف در ۲، ایدهٔ خوبی می‌تواند باشد:

$$a^2+b^2+1\ge ab+a+b\xleftrightarrow{\times 2}2a^2+2b^2+2\ge 2ab+2a+2b\Leftrightarrow a^2+a^2+b^2+b^2+1+1-2ab-2a-2b\ge 0$$

$$a^2-2a+1+b^2-2b+1+a^2-2ab+b^2\ge 0\Leftrightarrow(a-1)^2+(b-1)^2+(a-b)^2\ge 0$$

این آخری همواره درست است، پس طبق روش اثبات بازگشتی حکم ثابت می‌شود.

مثال: فرض کنید a,b,c سه عدد حقیقی مثبت باشند. ثابت کنید: $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geq 9$

پاسخ: آن پرانتزهای سمت چپ را ضرب کرده و ساده می‌کنیم تا ببینیم چه درمی‌آید:

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geq 9 \Leftrightarrow 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1\geq 9$$

$$\Leftrightarrow (\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2)+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2)+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2)\geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}})^2}_{\text{(بازکن ببین همون میشه)}}+(\sqrt{\frac{a}{c}}-\sqrt{\frac{c}{a}})^2+(\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt{\frac{c}{b}})^2\geq 0$$

آخرین رابطه همواره درست بوده و همهٔ گزاره‌ها هم‌ارز هستند، پس حکم ثابت می‌شود.

مثال: a,b دو عدد حقیقی مثبت هستند. ثابت کنید $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\geq\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{ab}}$.

پاسخ: a,b هر دو مثبت هستند، پس $\sqrt{ab}$ تعریف‌شده و مثبت است. حالا:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\geq\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\underbrace{\sqrt{a}\sqrt{b}}_{\sqrt{ab}}}\geq\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{ab}} \xleftrightarrow{\times\sqrt{ab}} \sqrt{b}+\sqrt{a}\geq\sqrt{a+b}$$

حالا چون هر دو طرف مثبت هستند، می‌توانیم دو طرف را به توان دو برسانیم (*یادته؟* $a,b>0: a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$)

$\Leftrightarrow (\sqrt{b}+\sqrt{a})^2\geq(\sqrt{a+b})^2 \Leftrightarrow b+a+2\sqrt{a}\sqrt{b}\geq a+b \Leftrightarrow 2\sqrt{a}\sqrt{b}\geq 0$ همواره برقرار

این آخری همواره درست است. همهٔ گزاره‌ها هم‌ارز هستند پس حکم ثابت می‌شود.

مثال: آیا ترکیب $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$ درست است؟ a,b چه شرطی داشته باشند تا این ترکیب دوشرطی درست باشد؟ *(نهایی شهریور ۹۹ با تغییر)*

پاسخ: اگر $a<b$ باشد می‌توانیم الزاماً بگوییم $a^2<b^2$؟ خب نه! مثلاً $-3<1$ است، ولی $9 \not< 1$.

پس $a<b \Rightarrow a^2<b^2$ نادرست است. برعکس هم در حالت کلی نادرست است. اما اگر a,b هیچ‌کدام منفی نباشند، این ترکیب دوشرطی درست است. خلاصه این‌که اگر $a,b\geq 0$ باشند: $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$ درست است.

خوب است یک جمع‌بندی روی چهار روش اثبات داشته باشیم:

نوع اثبات	روش کار	کاربرد
مستقیم	از درستی فرض به درستی حکم می‌رسیم.	از زوج یا فرد بودن اعداد به درستی حکم می‌رسیم.
در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها	n را حالت‌بندی می‌کنیم (مثلاً زوج و فرد) و در هر کدام به درستی حکم می‌رسیم.	برای هر n می‌خواهیم حکمی را ثابت کنیم.
برهان خلف	خلاف حکم را به تناقض می‌رسانیم.	اثبات گنگ‌بودن اعداد ـ هرجا که اثبات مستقیم دشوار باشد.
بازگشتی	حکم را با اعمال دوطرفه به یک رابطهٔ همواره درست می‌رسانیم.	نامساوی‌ها

در امتحان نهایی چه خبر؟

تیپ ۱ کتاب درسی تأکید کرده است که سؤال‌های این درس شبیه تمرین‌های کتاب درسی می‌باشد؛ بنابراین سؤال‌هایی که از این قسمت می‌آید، از متن کتاب درسی است. صورت تمرین‌ها و قضیه‌ها به صورت درست و نادرست یا جای خالی می‌آید، پس آن‌ها را حفظ باشید. برای ردکردن یک حکم کلی نیز ارائهٔ یک مثال نقض کافی است.

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۱ تا ۲۰

تیپ ۲ اثبات مستقیم است که باید از درستی فرض به درستی حکم برسید. به‌خصوص اثبات این تمرین هم که اگر k ضرب دو عدد متوالی باشد، $4k+1$ مربع کامل است.

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۲۱ تا ۳۴ و ۷۴ و ۷۵

تیپ ۳ اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها (مثلاً n زوج و n فرد یا $n=3k$، $n=3k+1$ و $n=3k+2$ و اثبات حکم) است که کم‌تر از آن سؤال آمده است. چند تمرین مهم داریم که اثبات آن‌ها را به خاطر داشته باشید.

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۳۵ تا ۴۰ و ۷۶

تیپ ۴ اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف است که خلاف حکم را به تناقض می‌رسانیم.
اثبات گنگ‌بودن اعداد با این روش صورت می‌گیرد (همچنین اثبات آن تمرین مهم a_1، a_2 و a_3 و جایگشتی از آن‌ها که با b_1، b_2 و b_3 نشان می‌دادیم.)
حالا تو حل کن: سؤال‌های ۴۱ تا ۵۳ و ۷۷

تیپ ۵ اثبات با گزاره‌های هم‌ارز (یا بازگشتی) است. اثبات درستی نامساوی‌ها معمولاً با این روش انجام می‌شود که حکم را با اعمال دوطرفه همواره درست می‌رسانیم. از بین چهار روش اثبات بیشتر از این تیپ سؤال می‌آید.
حالا تو حل کن: سؤال‌های ۵۴ تا ۷۳

سؤال‌های امتحانی

سؤالات با علامت ... سخت‌ترین سؤال‌های هر درس هستن. اگه به کم‌تر از ۲۰ راضی نمی‌شی، برو سراغ اون‌ها.

درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

۱- اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab=0$، آن‌گاه $a=0$ یا $b=0$. (نهایی شهریور ۹۹)

۲- هیچ دو عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطهٔ $x^2+y^2=(x+y)^2$ برقرار باشد. (نهایی خرداد ۱۴۰۰)

۳- اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $4k+1$ مربع کامل است. (نهایی دی ۹۷)

۴- ضرب هر عدد گویا در عددی گنگ، عددی گنگ است. (نهایی شهریور ۱۴۰۲)

۵- اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است. (نهایی دی ۱۴۰۱)

۶- برای مقادیر حقیقی و ناصفر و به شرط آن‌که $a+b\neq 0$ تساوی $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$ برقرار است. (نهایی دی ۱۴۰۱)

جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.

۷- برای اثبات نادرستی یک گزاره از .... استفاده می‌کنیم.

۸- حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ عددی .... است. (گویا / گنگ) (نهایی دی ۱۴۰۰)

۹- میانگین حسابی دو عدد x و y برابر .... و میانگین هندسی دو عدد x و y برابر .... است.

۱۰- اگر 7ab عددی فرد باشد، حاصل a^2+b^2 عددی .... است.

۱۱- در روش برهان خلف از خلاف .... به .... می‌رسیم.

گزاره‌های زیر را با ارائهٔ مثال نقض مناسب رد کنید.

۱۲- برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد 2^n-1 اول است. (نهایی شهریور ۹۸)

۱۳- معکوس هر عدد مثبت، بزرگ‌تر یا مساوی خودش است.

۱۴- ضرب دو عدد گنگِ غیرمساوی، عددی گنگ است.

۱۵- ضرب هر عدد گویا در عددی گنگ، همواره گنگ می‌شود. (نهایی دی ۱۴۰۲)

نادرستی گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

۱۶- اگر $\alpha+\beta$ گنگ باشد، $\alpha-\beta$ هم گنگ است.

۱۷- اگر α,β دو عدد گنگ غیرمساوی باشند، $\frac{\alpha+\beta}{2\beta}$ گنگ است.

۱۸- اگر a,b دو عدد حقیقی باشند که $ab=0$، آن‌گاه $a=0\wedge b=0$.

۱۹- اگر $A\cap B=A\cap C$ باشد، آن‌گاه $B=C$.

۲۰- برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x,y : $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$. (نهایی شهریور ۹۹)

درستی گزاره‌های زیر را به صورت مستقیم ثابت کنید.

۲۱- جمع دو عدد گویا، گویا است. (مشابه تمرین کتاب)

۲۲- اگر n عددی فرد باشد، مجموع n عدد طبیعی متوالی بر n بخش‌پذیر است.

۲۳- میانگین هفت عدد طبیعی متوالی، همان عدد وسطی می‌شود. (مشابه تمرین کتاب)

۲۴- اگر a مضرب ۳ باشد، آن‌گاه $a(a+3)$ بر ۱۸ بخش‌پذیر است.

۲۵- اگر مربع عددی فرد را با ۳ برابر عددی زوج جمع کنیم، حاصل فرد می‌شود.

۲۶- برای هر عدد طبیعی زوج n، n^2-5n+7 عددی فرد است. (نهایی خرداد ۱۴۰۱)

■ گزاره‌های زیر را ثابت کرده یا با ارائهٔ مثال نقض آن‌ها را رد کنید.

۲۷- به ازای هیچ دو عدد اول a, b، عدد $a+b$ اول نمی‌شود.

۲۸- اگر از مکعب عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل عددی زوج می‌شود.

۲۹- مجموع سه عدد طبیعی فرد متوالی همواره بر ۳ بخش‌پذیر است. (مشابه تمرین کتاب)

۳۰- برای هر عدد طبیعی n، عدد $۲^n + ۱$ اول است. (نهایی شهریور ۱۴۰۱)

۳۱- با اضافه کردن یک واحد به حاصل‌ضرب دو عدد زوج متوالی، حاصل، مربع کامل است. (نهایی دی ۱۴۰۲)

۳۲- اگر a, b, c سه عدد طبیعی باشند، $a\sqrt{bc}$ گنگ است.

۳۳- ضرب ۳ عدد زوج متوالی بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

۳۴- اگر a, b دو عدد صحیح و $۳ab$ عددی فرد باشد، $a^۲ + b^۲$ عددی زوج است. (مشابه تمرین کتاب)

۳۵- ثابت کنید حاصل‌ضرب ۳ عدد صحیح متوالی که عدد وسطی فرد است بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

■ گزاره‌های زیر را ثابت کنید. (به روش در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها)

۳۶- برای هر عدد طبیعی n، عبارت $n^۲ + ۵n - ۷$ عددی فرد است. (مشابه تمرین کتاب)

۳۷- به ازای هر عدد طبیعی n، عدد $n^۲ + ۲$ بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

۳۸- اگر n عددی طبیعی و $\frac{n(n+1)}{۲}$ زوج باشد، $n = ۴q$ یا $n = ۴q + ۳$.

۳۹- گزارهٔ «اگر $(a-1)b = ۰$ باشد، آن‌گاه $a = ۱$ یا $b = ۰$» را ثابت کنید. (مشابه تمرین کتاب)

۴۰- فرض کنیم $A = \{۳, ۴, ۵\}$ و $S = \{۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$، اگر $\frac{n^۲(n^۲-1)^۲}{۳۶}$ زوج باشد و $n \in S$، ثابت کنید $n \in A$. (مشابه تمرین کتاب)

۴۱- ثابت کنید معکوس هر عدد گنگ، عددی گنگ است. (مشابه تمرین کتاب)

۴۲- می‌دانیم $\sqrt{۲}$ گنگ است. ثابت کنید $\sqrt[۳]{\sqrt{۲} + ۲}$ نیز گنگ است.

۴۳- می‌دانیم $\sqrt{۲}$ گنگ است. ثابت کنید $\sqrt{۳} + \sqrt{۲}$ نیز عددی گنگ است.

۴۴- فرض کنید n عددی طبیعی و $۳n - ۲$ عددی فرد باشد. ثابت کنید n نیز فرد است.

۴۵- ثابت کنید حاصل‌جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (مشابه تمرین کتاب)

۴۶- فرض کنید α, β دو عدد گنگ باشند به طوری که $\alpha + \beta$ گویا باشد. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است. (نهایی دی ۹۹ و دی ۱۴۰۰)

۴۷- اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha + ۲\beta$ گنگ است. (نهایی دی ۹۷)

۴۸- فرض کنید a عدد گویای غیرصفر و x عددی گنگ باشد. ثابت کنید ax گنگ است. (مشابه تمرین کتاب)

۴۹- $b^۲$ و a دو عدد گنگ هستند به طوری که ab عددی گویا است. ثابت کنید $\frac{a}{b}$ گنگ است.

۵۰- ثابت کنید اگر تابع f در $x = a$ پیوسته ولی تابع g در $x = a$ ناپیوسته باشد، تابع $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است. (مشابه تمرین کتاب)

۵۱- نشان دهید اگر ضرب دو عدد طبیعی a, b زوج باشد، آن‌گاه a زوج یا b زوج بوده است.

۵۲- همهٔ جواب‌های معادلهٔ $(a+b)^۲ = a^۲ + b^۲$ را به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب)

۵۳- اگر $a, b \neq ۰$ و $a + b \neq ۰$، نشان دهید معادلهٔ $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ جواب ندارد. (مشابه تمرین کتاب)

۵۴- $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ اعدادی صحیح هستند و $b_۱$، $b_۲$ و $b_۳$ هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_۱ - b_۱)(a_۲ - b_۲)(a_۳ - b_۳)$ عددی زوج است. (نهایی شهریور ۱۴۰۱)

■ کدام‌یک از ترکیب‌های دوشرطی زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ چرا؟ (مشابه تمرین کتاب)

۵۵- $n^۲$ زوج است اگر و فقط اگر n زوج باشد.

۵۶- $a < b \Leftrightarrow a^۳ < b^۳$.

۵۷- $x = ۱ \Leftrightarrow x^۲ = ۱$.

۵۸- $x^۳ \leq x^۲ \Leftrightarrow x \leq ۱$.

■ احکام زیر را ثابت کنید.

۵۹- ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن‌ها کم‌تر نیست. (نهایی خرداد ۹۸ و شهریور ۹۹)

(به $\frac{x+y}{۲}$ میانگین حسابی دو عدد و به $\sqrt{xy}$ میانگین هندسی دو عدد می‌گوییم.)

۶۰- اگر $a<0$ باشد، آن‌گاه $a+\frac{1}{a}\le -2$. *(مشابه نهایی دی ۹۸)*

۶۱- a,b,c سه عدد حقیقی هستند. ثابت کنید: $3+a^2+b^2+c^2\ge 2(a+b+c)$ *(مشابه تمرین کتاب)*

۶۲- برای هر دو عدد حقیقی x و y به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) نشان دهید: $2x^2+2xy+y^2\ge 4x-4$ *(نهایی شهریور ۱۴۰۲)*

۶۳- گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید: (۱) $y^2+1\ge -2x(y+x+1)$ *(نهایی دی ۱۴۰۱)*

برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم:

۶۴- اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $x^2+y^2+1\ge 2xy-z^2$ *(نهایی خرداد ۱۴۰۲)*

۶۵- a,b دو عدد حقیقی مثبت هستند. داریم: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$.

۶۶- x,y دو عدد حقیقی مثبت هستند. داریم: $x^2y^2\le(\frac{x^2+y^2}{2})^2$.

۶۷- a,b,c سه عدد حقیقی هستند. ثابت کنید: $a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc$. *(مشابه تمرین کتاب)*

۶۸- برای اعداد حقیقی ناصفر و هم‌علامت a,b ثابت کنید: $\frac{5a-3b}{b}\ge\frac{-4a-5b}{2a}$.

۶۹- ثابت کنید مجموع مربعات هر دو عدد حقیقی همواره از قرینهٔ حاصل‌ضرب آن‌ها کم‌تر نیست. *(نهایی دی ۱۴۰۲)*

۷۰- به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌هاست. *(نهایی خرداد ۱۴۰۰)*

۷۱- برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x,y داریم: $(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\ge 4$.

۷۲- برای هر عدد حقیقی a ثابت کنید: $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2$.

گزاره‌های درست را ثابت کرده و برای گزاره‌های نادرست مثال نقض ارائه کنید.

۷۳- برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^4+1\ge x^3+x$.

۷۴- اگر x گنگ باشد، $3x^2+18x+4$ نیز گنگ است.

۷۵- ضرب هر چهار عدد طبیعی متوالی از مربع کامل یک واحد کم‌تر است.

۷۶- ثابت کنید $p\vee q\Rightarrow r\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$. *(مشابه تمرین کتاب)*

۷۷- ثابت کنید اگر x، y و $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ گویا باشند، آن‌گاه $\sqrt{x}$ و $\sqrt{y}$ هر دو گویا هستند.

بخش ۲: بخش‌پذیری در اعداد صحیح ـ قسمت اول

رابطهٔ عادکردن (شمردن)

۶ بر ۲ بخش‌پذیر است. چرا؟ چون عددی صحیح، مثل ۳ وجود دارد که $6=3\times2$ می‌شود. این را این‌جوری می‌نویسیم $2|6$ و می‌خوانیم «عدد ۲، عدد ۶ را عاد می‌کند یا می‌شمارد یا ۶ بر ۲ بخش‌پذیر است» یا مثلاً $7|-14$ چون عددی مثل (-2) وجود دارد که $-14=(-2)\times7$ می‌شود، ولی $2\nmid5$ چون عدد صحیحی وجود ندارد که در ۲ ضرب شده و حاصل برابر ۵ شود. در حالت کلی داریم:

تعریف رابطهٔ عادکردن: b و a دو عدد صحیح هستند؛ می‌گوییم a، عدد b را عاد می‌کند (می‌شمارد) و می‌نویسیم $a|b$ هرگاه عدد صحیحی مثل q وجود داشته باشد که $aq=b$. به زبان ریاضی:

$$a|b\Leftrightarrow\exists q\in\mathbb{Z}\,;\,aq=b$$

اگر $a|b$ آن‌گاه b مضرب a و a مقسوم‌علیه b است.

تذکر: همهٔ اعدادی مثل a، b، x و ... که در این فصل با آن‌ها سروکار داریم، صحیح هستند.

ویژگی‌های مقدماتی عادکردن

- $1|17$ چون $17=17\times1$. شبیه همین $-1|17$ چون $17=(-17)\times(-1)$. در حالت کلی ±1 همهٔ اعداد را عاد می‌کنند. پس برای هر عدد صحیح a داریم $\pm1|a$.
- هر عددی، خودش و قرینه‌اش را عاد می‌کند یعنی $\pm a|\pm a$.
- هر عددی مثل a، صفر را عاد می‌کند، یعنی $a|0$، چون $a\times0=0$.
- اگر $0|a$، آن‌گاه $0\times q=a$ پس $a=0$؛ یعنی فقط صفر، صفر را عاد می‌کند.
- اگر n و m دو عدد طبیعی و $m\le n$ باشد، آن‌گاه $a^m|a^n$. (مثلاً $2^5|2^7$)

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱. درست است. با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها حکم را ثابت می‌کنیم. دو حالت داریم، بالأخره $a=۰$ یا $a\neq ۰$:

الف اگر $a=۰$ باشد که حکم ثابت شده است.

ب اگر $a\neq ۰$ باشد، با ضرب دو طرف رابطهٔ $ab=۰$ در $\frac{۱}{a}$ داریم:

$$ab=۰ \xrightarrow{\times\frac{۱}{a}} b=۰$$

پس باز هم حکم نتیجه می‌شود.

۲. نادرست است. $x=y=۰$ وجود دارد.

۳. درست است. اگر $k=n(n+۱)$ بگیریم، داریم:

$$۴k+۱=۴n(n+۱)+۱=۴n^۲+۴n+۱=(۲n+۱)^۲$$

۴. نادرست است. مثال نقض: $a=۰$ و $b=\sqrt{۲}$

۵. درست است (اثبات با برهان خلف). خلاف حکم را در نظر می‌گیریم یعنی فرض می‌کنیم $\frac{۱}{x}$ گویا باشد، داریم: $\frac{۱}{x}=\frac{a}{b}(a,b\in\mathbb{Z};b\neq ۰)$ از طرفی $a\neq ۰$ ($\frac{۱}{x}$ صفر نیست)، پس $x=\frac{b}{a}$ بنابراین x گویا است.

به تناقض رسیدیم، پس فرض خلف باطل و خود حکم درست است.

۶. نادرست است. مثال نقض $a=۱$ و $b=۱$ ($\frac{۱}{۲}\neq\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۱}$)

۷. مثال نقض

۸. ضرب عدد گویای ناصفر در عدد گنگ، گنگ است.

۹. $\sqrt{xy}-\frac{x+y}{۲}$

۱۰. $۷ab$ فرد باشد، b و a فرد پس $b^۲$ و $a^۲$ هم فرد ولی $a^۲+b^۲$ زوج است.

۱۱. حکم ـ خلاف فرض یا امر بدیهی

۱۲. اگر $n=۴$ بگیریم، $۲^۴-۱=۱۵$ می‌شود که اول نیست.

۱۳. معکوس عدد ۳ برابر $\frac{۱}{۳}$ می‌شود، اما $\frac{۱}{۳}\not\geq ۳$.

۱۴. دو عدد گنگ را $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۸}$ بگیریم، اما $\sqrt{۲}\times\sqrt{۸}=۴$ می‌شود که عددی گویا است.

۱۵. عدد گویا را صفر و عدد گنگ را $\sqrt{۲}$ می‌گیریم. $۰\times\sqrt{۲}=۰$ می‌شود که عددی گویا است.

۱۶. $\alpha=\beta=\sqrt{۲}$ بگیریم $\alpha+\beta=۲\sqrt{۲}$ گنگ می‌شود، ولی $\alpha-\beta=\sqrt{۲}-\sqrt{۲}=۰$ گنگ نبوده و گویا است.

۱۷. اول دقت کنید که $\frac{\alpha}{۲\beta}+\frac{۱}{۲}=\frac{\alpha+\beta}{۲\beta}$ می‌شود. اگر $\alpha=\sqrt{۸}$ و $\beta=\sqrt{۲}$ بگیریم داریم:

$$\frac{\alpha}{۲\beta}+\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۸}}{۲\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۲}=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$ (که گویا شد)

۱۸. اگر $a=۰$ و $b=۱$ بگیریم $ab=۰$ می‌شود، ولی $a=۰\wedge b=۰$ نادرست است. چرا؟

ترکیب عطفی وقتی درست می‌شود که هر دو درست باشند. در این مثالی که زدیم $a=۰$ درست ولی $b=۰$ نه! توجه کنید که اگر این‌جوری نوشته بود «$ab=۰ \Rightarrow a=۰\vee b=۰$» درست می‌شد، یعنی اگر ضرب دو عبارت صفر باشد، نتیجه می‌گیریم **حداقل یکی برابر صفر است، یعنی اولی صفر بوده است یا دومی.**

۱۹. اگر $A=\{۱,۲\}$، $B=\{۱,۳\}$ و $C=\{۱,۴\}$ بگیریم داریم: $\underbrace{A\cap B}_{\{۱\}}=\underbrace{A\cap C}_{\{۱\}}$ ولی $B\neq C$.

۲۰. کافی است $x=۹, y=۴$ بگیریم:

$$\sqrt{۱۳}=\sqrt{۹+۴}\neq\sqrt{۹}+\sqrt{۴}=۳+۲=۵$$

۲۱. مجموعهٔ اعداد گویا به صورت $Q=\{\frac{a}{b}|a,b\in\mathbb{Z},b\neq ۰\}$ تعریف می‌شود، یعنی مجموعهٔ اعداد گویا شامل کسرهایی هستند که صورت و مخرج عدد صحیح بوده و مخرج مخالف صفر باشد. فرض کنیم $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ گویا باشند. $(d,b\neq ۰)$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

چون a,b,c,d صحیح هستند، صورت و مخرج صحیح هستند و چون b و d هیچ‌کدام صفر نیستند $bd\neq ۰$، پس $\frac{ad+bc}{bd}$ حتماً عددی گویا است.

۲۲. n عدد طبیعی متوالی $n,n+۱,n+۲,\dots,n+(n-۱)$ را می‌گیریم.

حالا: (*چرا تا $n-۱$ رفت؟ ببین از $n+۰$ رفت تا $(n+(n-۱))$*)

$$n+(n+۱)+(n+۲)+\cdots+(n+(n-۱))$$

$$=n\times n+\underbrace{(۱+۲+\cdots+n-۱)}_{\text{(مجموع } n-۱ \text{ جملهٔ دنبالهٔ حسابی)}}=n^۲+\frac{(n-۱)(n)}{۲}$$

n عددی فرد است، پس $n-۱$ زوج بوده یعنی $n-۱=۲q\Rightarrow\frac{n-۱}{۲}=q$؛ پس:

$$n^۲+q(n)=n(\underbrace{n+q}_{q'})=nq'$$

۲۳. هفت عدد طبیعی را به صورت $n,n+۱,n+۲,\underline{n+۳},n+۴,n+۵,n+۶$ در نظر می‌گیریم. میانگین این‌ها می‌شود:

$$\frac{n+n+۱+n+۲+n+۳+n+۴+n+۵+n+۶}{۷}=\frac{۷n+۲۱}{۷}=n+۳$$

یعنی میانگین برابر عدد وسطی می‌شود. در حالت کلی میانگین تعداد فردی عدد، که تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند، برابر همان عدد وسطی می‌شود.

۲۴. گفته a مضرب ۳ باشد، پس $a=۳k$ می‌گیریم.

$$a(a+۳)=۳k(۳k+۳)=۳k(۳(k+۱))=۹\underbrace{k(k+۱)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی زوج است}}=۹(۲q)=۱۸q$$

۲۵. عدد فرد را $۲k+۱$ و عدد زوج را $۲q$ می‌گیریم. حالا داریم:

$$(۲k+۱)^۲+۳(۲q)=۴k^۲+۴k+۱+۶q=۲(\underbrace{۲k^۲+۲k+۳q}_{q'})+۱=۲q'+۱$$

۲۶.

$$n=۲k \Rightarrow (۲k)^۲-۵(۲k)+۷=۴k^۲-۱۰k+۶+۱$$

$$=۲(\underbrace{۲k^۲-۵k+۳}_{q})+۱=۲q+۱$$

۲۷. اگر بخواهیم این را رد کنیم باید دو عدد اول پیدا کنیم که جمع آن‌ها اول بشود. $a=۲$ و $b=۳$ می‌گیریم. (پس دو عدد اول a,b وجود دارد به طوری که $a+b$ هم اول بشود).

۲۸. عدد فرد به هر توانی برسد، فرد می‌شود حالا اگر یک واحد کم کنیم زوج می‌شود. این را ثابت می‌کنیم:

$$(۲k+۱)^۳-۱=۸k^۳+۱۲k^۲+۶k+۱-۱=۲(\underbrace{۴k^۳+۶k^۲+۳k}_{q})=۲q$$

۲۹. اولین عدد طبیعی فرد اول را $۲k+۱$ می‌گیریم. بعدی دو واحد بیش‌تر است پس عدد فرد بعدی $۲k+۳$ و بعدی $۲k+۵$ می‌شود. حالا:

$$۲k+۱+۲k+۳+۲k+۵=۶k+۹=۳(\underbrace{۲k+۳}_{q})=۳q$$

۳۰. مثال نقض $n=۳$ چون $۲^۳+۱=۹$ می‌شود که اول نیست.

۳۱. اثبات درستی:

$$\overbrace{۲k(۲k+۲)}^{\text{دو عدد زوج متوالی}}+۱=۴k^۲+۴k+۱=(۲k+۱)^۲$$

۳۲. کافی است $a=۱$ و $b=c=۲$ بگیریم تا $a\sqrt{bc}=۲$ بشود. این مثال نقض یعنی گزاره نادرست است.

۳۳. به نظر می‌رسد که درست باشد (*چندتا عدد امتحان کنین!*) اولین زوج اول را $۲k$، بعدی را $۲k+۲$ و بعدی را $۲k+۴$ می‌گیریم. حالا:

$$(۲k)\overbrace{(۲k+۲)}^{۲(k+۱)}\overbrace{(۲k+۴)}^{۲(k+۲)}=۸\underbrace{k(k+۱)(k+۲)}_{\text{ضرب ۳ عدد متوالی مضرب ۶ و در نتیجه مضرب ۳ است}}=۸(۳q)=۲۴q$$

۳۴. گفته ۳ab عددی فرد باشد، پس a,b باید عددی فرد باشند *(تا ضربشون فرد بشه)*، یعنی $a=۲k+۱$ و $b=۲q+۱$. حالا:

$$a^۲+b^۲=(۲k+۱)^۲+(۲q+۱)^۲$$
$$=۴k^۲+۴k+۱+۴q^۲+۴q+۱=۲\underbrace{(۲k^۲+۲k+۲q^۲+۲q+۱)}_{t}=۲t$$

۳۵. عدد فرد وسطی را $۲k+۱$ می‌گیریم. یکی بیش‌تر $۲k+۲$ و یکی کم‌تر $۲k$ می‌شود. حالا داریم:

$$(۲k)(۲k+۱)\overbrace{(۲k+۲)}^{۲(k+۱)}=۴\underbrace{k(k+۱)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی زوج است.}}(۲k+۱)=۴(۲q)(۲k+۱)=۸q(۲k+۱)$$

از طرفی ضرب ۳ عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است. پس ضرب این سه عدد هم مضرب ۳ بوده و هم مضرب ۸، یعنی بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

۳۶. دو حالت در نظر می‌گیریم. n زوج باشد یا فرد:

۱) $n=۲k$، پس:

$$n^۲+۵n-۷=(۲k)^۲+۵(۲k)-۷$$
$$=۴k^۲+۱۰k-۷=۴k^۲+۱۰k-۸+۱$$
$$=۲\underbrace{(۲k^۲+۵k-۴)}_{q}+۱=۲q+۱ \Rightarrow \text{حاصل فرد است.}$$

۲) $n=۲k+۱$، پس:

$$n^۲+۵n-۷=(۲k+۱)^۲+۵(۲k+۱)-۷$$
$$=۴k^۲+۴k+۱+۱۰k+۵-۷=۴k^۲+۱۴k-۱=۴k^۲+۱۴k-۲+۱$$
$$=۲\underbrace{(۲k^۲+۷k-۱)}_{q}+۱=۲q+۱ \Rightarrow \text{حاصل فرد است.}$$

پس در دو حالت، حاصل عددی فرد است، این یعنی به ازای هر عدد طبیعی n، حاصل $n^۲+۵n-۷$ فرد می‌شود.

۳۷. دو حالت می‌گیریم. n زوج باشد یا فرد:

۱) $n=۲k \Rightarrow n^۲+۲=(۲k)^۲+۲=۴k^۲+۲=۴q+۲$

۲) $n=۲k+۱ \Rightarrow n^۲+۲=(۲k+۱)^۲+۲=۴k^۲+۴k+۳$

$$=۴\underbrace{(k^۲+k)}_{q}+۳=۴q+۳$$

پس در هیچ‌کدام از دو حالت، n به صورت ۴q درنمی‌آید (باقی‌مانده دارد)، پس هیچ گاه $n^۲+۲$ بر ۴ بخش‌پذیر نمی‌شود.

۳۸. دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) n زوج $\Rightarrow n=۲k \Rightarrow A=\frac{n(n+۱)}{۲}=\frac{۲k(۲k+۱)}{۲}$

$$=k(۲k+۱) \xrightarrow[\text{زوج باشد k باید زوج باشد.}]{\text{۲k+۱ فرد است، پس برای این‌که A}} k=۲q$$

$\Rightarrow n=۲k=۴q$ *(پس این‌جا حکم نتیجه می‌شه!)*

۲) n فرد $\Rightarrow n=۲k+۱ \Rightarrow A=\frac{n(n+۱)}{۲}$

$$=\frac{(۲k+۱)\overbrace{(۲k+۲)}^{۲(k+۱)}}{۲}=(۲k+۱)(k+۱)$$

شبیه حالت اول $k+۱$ باید زوج باشد پس k فرد است، یعنی $k=۲q+۱$، بنابراین $n=۲k+۱=۴q+۳$ می‌شود. *(یعنی این‌جا هم حکم نتیجه می‌شه)*

۳۹. دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱) $b=۰$ باشد: در این حالت ترکیب $a=۱$ یا $b=۰$ درست است.

۲) $b\neq ۰$ باشد: در این حالت عدد $\frac{۱}{b}\in\mathbb{R}$ وجود دارد، پس:

$$(a-۱)b=۰ \xrightarrow{\times\frac{۱}{b}} a-۱=۰ \Rightarrow a=۱$$

یعنی در این حالت $a=۱$ بوده و باز هم ترکیب $a=۱$ یا $b=۰$ درست می‌شود.

پس در هر دو حالت، این ترکیب درست بوده و کل گزاره درست می‌شود.

۴۰. با روش در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها جلو برویم. بالأخره n برابر با یکی از اعداد ۶,...,۲,۳ می‌تواند باشد. یکی‌یکی این‌ها را امتحان می‌کنیم. اگر $\frac{n^۲(n^۲-۱)^۲}{۳۶}$ زوج بشود، n قبول است. البته $\frac{n^۲(n^۲-۱)^۲}{۳۶}=(\frac{n(n^۲-۱)}{۶})^۲$ راحت‌تر محاسبه می‌شود.

۱) اگر $n=۲$ باشد، آن‌گاه $\frac{n^۲(n^۲-۱)^۲}{۳۶}=۱$؛ پس $n=۲$ قبول نیست.

۲) اگر $n=۳$ باشد، آن‌گاه $\frac{n^۲(n^۲-۱)^۲}{۳۶}=۱۶$ پس $n=۳$ قبول است (چون $\frac{n^۲(n^۲-۱)^۲}{۳۶}$ زوج شد.)

۳) اگر $n=۴$ باشد، آن‌گاه $\frac{n^۲(n^۲-۱)^۲}{۳۶}=۱۰۰$ پس $n=۴$ قبول است.

۴) اگر $n=۵$ باشد، آن‌گاه $\frac{n^۲(n^۲-۱)^۲}{۳۶}=۴۰۰$ پس $n=۵$ هم قبول است.

۵) اگر $n=۶$ باشد، $\frac{n^۲(n^۲-۱)^۲}{۳۶}=۳۵^۲$ می‌شود که فرد است، پس $n=۶$ قبول نیست.

$A=\{۳,۴,۵\}$ است پس حتماً $n\in A$ بوده است.

۴۱. x را عددی گنگ در نظر می‌گیریم. باید ثابت کنیم $\frac{۱}{x}$ هم گنگ است. (فرض خلف) فرض کنیم $\frac{۱}{x}$ گنگ نباشد، پس گویا است یعنی برابر با عددی گویا (غیرصفر) مثل $\frac{a}{b}$ می‌شود؛ پس: $\frac{۱}{x}=\frac{a}{b} \Rightarrow x=\frac{b}{a}\ (a,b\in\mathbb{Z}, a\neq ۰, b\neq ۰)$

این یعنی x هم گویا است. تناقض حاصل می‌گوید خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۴۲. (فرض خلف) فرض کنیم حکم برقرار نباشد یعنی $\sqrt[۳]{\sqrt{۲}+۲}$ گنگ نباشد، یعنی گویا باشد، پس:

$$\sqrt[۳]{\sqrt{۲}+۲}=a\ ,\ a\in\mathbb{Q} \xrightarrow{\text{توان ۳}} \sqrt{۲}+۲=a^۳ \Rightarrow \sqrt{۲}=a^۳-۲$$

توان سوم هر عدد گویا، گویا بوده از طرفی تفاضل دو عدد گویا هم گویا است، پس $a^۳-۲$ گویا و در نتیجه $\sqrt{۲}$ گویا می‌شود. *(ولی گفته $\sqrt{۲}$ گنگه!)* تناقض حاصل با فرض مسئله می‌گوید خلاف حکم باطل بوده و خود حکم درست است.

۴۳. شبیه قبلی فرض کنیم $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ گنگ نبوده و گویا باشد باید کاری کنیم که به تناقض با فرض برسیم، یعنی نتیجه بشود که $\sqrt{۲}$ گویا است.

$$\sqrt{۲}+\sqrt{۳}=a\ ,\ a\in\mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{۳}=a-\sqrt{۲}$$
$$\xrightarrow{\text{توان دوم}} ۳=a^۲+۲-۲\sqrt{۲}a \Rightarrow ۲\sqrt{۲}\,a=a^۲-۱ \Rightarrow \sqrt{۲}=\frac{a^۲-۱}{۲a}$$

$a^۲-۱$ و $۲a$ گویا، (مخرج غیرصفر) هستند، پس $\frac{a^۲-۱}{۲a}$ هم گویا می‌شود.

این یعنی $\sqrt{۲}$ هم گویا است. به تناقض رسیدیم پس خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۴۴. خلاف حکم را در نظر می‌گیریم، یعنی n فرد نباشد پس n زوج است.

$$n=۲k \Rightarrow ۳n-۲=۳(۲k)-۲=۶k-۲=۲(۳k-۱)=۲q$$

این یعنی $۳n-۲$ زوج است در صورتی که گفته فرد است. تناقض حاصل می‌گوید خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۴۵. عدد گویا را a و عدد گنگ را b می‌گیریم. گفته ثابت کنید $a+b$ گنگ است؛ پس از برهان خلف فرض می‌کنیم $a+b$ گویا باشد.

$$\underset{\text{گویا}}{\underset{\downarrow}{a}}+b=\underset{\text{گویا}}{\underset{\downarrow}{c}} \Rightarrow \underset{\text{گنگ}}{b}=\underset{\text{گویا}}{\underline{c-a}}$$

به تناقض رسیدیم پس خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۴۶. خلاف حکم را در نظر می‌گیریم؛ یعنی $\alpha-\beta$ گویا باشد. از طرفی $\alpha+\beta$ هم گویا است، پس جمع این دو عدد هم گویا می‌شود، یعنی داریم:

$$\alpha+\beta+(\alpha-\beta)=2\alpha$$

پس 2α گویا است یعنی α هم گویا است. تناقض حاصل نشان می‌دهد که خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۴۷. فرض کنیم $\alpha+2\beta$ گویا باشد، پس:

$$\alpha+2\beta=\underset{\text{گویا}}{\underset{\downarrow}{c}} \Rightarrow \underset{\text{گویا}}{\underline{\alpha+\beta}}+\beta=\underset{\text{گویا}}{c} \Rightarrow \underset{\text{گنگ}}{\beta}=\underset{\text{گویا}}{\underline{c-(\alpha+\beta)}}$$

به تناقض رسیدیم. خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۴۸. فرض کنیم ax گنگ نباشد پس ax گویا است. یعنی:

$$ax=b, b\in\mathbb{Q} \Rightarrow x=\frac{b}{a}\xrightarrow[\text{غیرصفر گویا است.}]{\text{تقسیم عدد گویا بر گویای}} x\in\mathbb{Q}$$

پس x گویا شد که تناقض است. پس ببینید در حالت کلی ضرب یک عدد گویا در یک عدد گنگ ممکن است گویا یا گنگ باشد (مثلاً $0\times\sqrt{2}=0$ ، $1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$). این ضرب فقط در صورتی گویا می‌شود که عدد گویا برابر صفر باشد و اگر عدد گویا صفر نباشد حاصل قطعاً گنگ است.

۴۹. فرض کنیم $\frac{a}{b}$ گنگ نباشد، پس $\frac{a}{b}$ عددی گویا است؛ فرض کنیم x گویا و $x=\frac{a}{b}$ باشد. پس $a=bx$. طرفین تساوی را در b ضرب می‌کنیم، داریم:

$$ab=b^2x$$

حالا ab گویا است یعنی $ab=b^2x$ هم گویا است. طبق فرض b^2 گنگ و x گویا است. چون $x\neq 0$ پس b^2x طبق تمرین قبلی گنگ است. (b^2x هم گویا و هم گنگ شد) تناقض حاصل نشان می‌دهد خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۵۰. به روش برهان خلف فرض می‌کنیم $f+g$ در $x=a$ پیوسته باشد، پس آن را برابر با تابع پیوستهٔ h می‌گیریم: $f+g=h \Rightarrow g=h-f$

f و h هر دو در $x=a$ پیوسته هستند، پس $h-f$ یا g در a پیوسته است.

به تناقض رسیدیم چون g در a ناپیوسته بود.

۵۱. خلاف حکم یعنی خلاف (a زوج یا b زوج) را در نظر می‌گیریم. طبق قانون دمورگان خلاف حکم می‌شود،

a فرد است و b هم فرد است، پس $a=2k+1$ و $b=2k'+1$ می‌گیریم:

$$ab=(2k+1)(2k'+1)=4kk'+2k+2k'+1$$
$$=2(\underbrace{2kk'+k+k'}_{q})+1=2q+1$$

یعنی ab فرد است. تناقض حاصل نشان می‌دهد خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۵۲. $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ می‌شود. با توجه به رابطه‌ای که داده شده، نتیجه می‌شود $2ab=0$ پس $a=0$ یا $b=0$ است. یعنی برای برقراری معادله حداقل یکی از a یا b باید صفر باشد.

۵۳. فرض کنیم a,b دو عدد طبیعی باشند به طوری که رابطهٔ داده‌شده برقرار باشد:

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a+b}=\frac{b+a}{ab} \Rightarrow ab=(a+b)^2$$
$$=a^2+b^2+2ab \Rightarrow a^2+b^2+ab=0 \Rightarrow a^2+ba+b^2=0$$

این را شبیه یک معادلهٔ درجه‌دوم برحسب a ببینید. $\Delta=b^2-4b^2=-3b^2<0$ می‌شود، پس معادله جواب ندارد. تناقض حاصل می‌گوید هیچ a و b طبیعی وجود ندارد که $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ بشود.

تذکر: یک جور دیگر هم می‌توانستیم رابطهٔ $a^2+b^2+ab=0$ را به تناقض برسانیم، ببینید:

$$\xrightarrow{\times 2} 2a^2+2b^2+2ab=0 \Rightarrow a^2+a^2+b^2+b^2+2ab=0$$
$$\Rightarrow a^2+b^2+(a+b)^2=0$$

عبارت‌های توان دوم همگی نامنفی هستند، پس جمع آن‌ها فقط وقتی صفر می‌شود که همگی صفر باشند: $a+bc=0, b=0, a=0$

به تناقض رسیدیم، چون در صورت سؤال گفته این‌ها مخالف صفر هستند.

۵۴. خلاف حکم را در نظر می‌گیریم، یعنی $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی فرد باشد. ضرب ۳تا عبارت، عددی فرد شده است، پس هر کدام فرد بوده است، یعنی $a_3-b_3, a_2-b_2, a_1-b_1$ همگی فرد هستند. از طرفی داریم:

$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)=(a_1+a_2+a_3)-(b_1+b_2+b_3)=0$$

مجموع سه عدد فرد، فرد است و نمی‌تواند زوج باشد. تناقض حاصل نشان می‌دهد خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

۵۵. (الف) درست است. دو چیز باید ثابت کنیم:

۱) اگر n زوج باشد، n^2 هم زوج است. این را به صورت مستقیم ثابت می‌کنیم:

$$n=2k \Rightarrow n^2=4k^2=2\underbrace{(2k^2)}_{q}=2q \Rightarrow$$ n^2 زوج است.

۲) اگر n^2 زوج باشد، آن‌گاه n زوج است. این را به صورت غیرمستقیم (با برهان خلف) ثابت می‌کنیم:

فرض کنیم n زوج نباشد، پس n فرد است: $n=2k+1$

$$\Rightarrow n^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2q+1$$

یعنی n^2 فرد است. تناقض حاصل نشان می‌دهد خلاف حکم باطل و خود حکم درست است.

تذکر: همین ترکیب دوشرطی برای nهای فرد هم برقرار است. یعنی: n^2 فرد است اگر و فقط اگر n فرد باشد.

۵۶. واضح است که a و b هر دو با هم صفر نیستند. در این حالت می‌توانیم ثابت کنیم $a^2+ab+b^2>0$. حالا:

$$a<b \Leftrightarrow a-b<0 \Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)<0$$
$$\Leftrightarrow a^3-b^3<0 \Leftrightarrow a^3<b^3$$

حواستان باشد اگر n فرد باشد $a<b \Leftrightarrow a^n<b^n$ درست است، اما اگر n زوج باشد $a<b \Leftrightarrow a^n<b^n$ وقتی درست است که a و b نامنفی باشند.

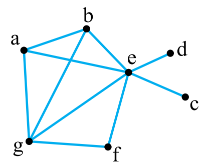
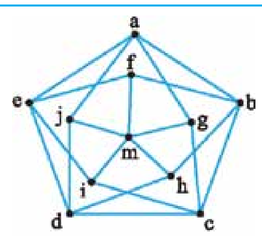
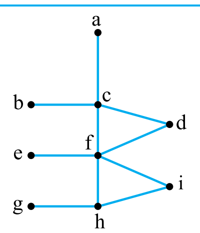
۵۷. اگر $x^2=1$ باشد $x=\pm 1$ نتیجه می‌شود، پس ترکیب دوشرطی غلط است. به زبان دیگر از $x^2=1$ الزاماً $x=1$ نتیجه نمی‌شود مثلاً $(-1)^2=1$ می‌شود ولی $-1\neq 1$.

۵۸. درست است. اگر $x\leq 1$ باشد با ضرب دو طرف در x^2 چون نامنفی است جهت تغییری نکرده و $x^3\leq x^2$ نتیجه می‌شود. برعکس اگر $x^3\leq x^2$ باشد و $x^2\neq 0$ با تقسیم بر x^2 نتیجه می‌شود $x\leq 1$. اگر $x^2=0$ هم باشد یعنی $x=0$ باشد خب $0\leq 1$ بوده و باز هم $x\leq 1$ نتیجه می‌شود.

در هر قسمت، از حکم شروع کرده و گزاره‌های هم‌ارز را می‌نویسیم تا به یک گزارهٔ همواره درست برسیم. بنابراین طبق استدلال بازگشتی حکم اولیه ثابت می‌شود.

۵۹. $$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy} \Rightarrow x+y\geq 2\sqrt{xy}$$
$$\Leftrightarrow x+y-2\sqrt{x}\sqrt{y}\geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0$$ همواره برقرار

۶۰. $$a+\frac{1}{a}\leq -2 \Leftrightarrow \frac{a^2+1}{a}\leq -2 \xleftrightarrow[\text{چون } a<0 \text{ جهت عوض می‌شود}]{\times a}$$
$$a^2+1\geq -2a \Leftrightarrow a^2+2a+1\geq 0 \Leftrightarrow (a+1)^2\geq 0$$ همواره برقرار

ردیف	نمونهٔ امتحان نیم‌سال دوم امتحان شمارهٔ ۶ ـ نهایی خرداد ۱۴۰۳	رشتهٔ ریاضی و فیزیک مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ریاضیات گسسته Kheilisabz.com	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) میانگین پنج عدد طبیعی همان عدد وسطی است. ب) اگر $m \in \mathbb{Z}-\{0\}$ آن‌گاه: $[m^5,(m^3,m^2)]=m^5$ ج) تفاضل هر دو عدد دلخواه از مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid x=4k+3\}$، مضرب ۴ است. د) هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است.			۱
۲	جاهای خالی را با اعداد مناسب تکمیل کنید. الف) عدد احاطه‌گری گراف C_7 برابر است با .... ب) تعداد راه‌های توزیع ۳ خودکار متفاوت بین ۵ نفر به طوری که به هر نفر حداکثر یک خودکار برسد، برابر .... است.			۰/۵
۳	با استفاده از اثبات بازگشتی نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم: $a^2+b^2 \ge (a-1)(b+1)$			۱/۵
۴	اگر a عددی طبیعی و داشته باشیم $a \mid 7k+1$ و $a \mid 4k+3$، ثابت کنید $a=1$ یا $a=17$.			۱
۵	اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب ۲ و ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۲۰ بیابید.			۱/۲۵
۶	جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ $5x+9y=22$ را به دست آورید.			۱/۵
۷	با توجه به گراف G مقابل به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) مرتبه و اندازهٔ گراف را بنویسید. ب) مسیری به طول ۵ از رأس c به رأس f بنویسید. ج) دوری به طول ۴ بنویسید. د) آیا گراف $\bar{G}$ همبند است؟ چرا؟  G			۲
۸	با توجه به گراف G، به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) آیا مجموعهٔ $D=\{a,b,m\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است؟ چرا؟ ب) عدد احاطه‌گری گراف G را به دست آورید. (با ذکر دلیل) ج) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۵عضوی از آن بنویسید.  G			۲
۹	در گراف روبه‌رو: الف) مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال $A=\{b,e,g,a,f\}$ را به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کنید. ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم که شامل رأس e باشد را بنویسید. ج) با اضافه‌نمودن چه یالی عدد احاطه‌گری گراف ۲ می‌شود؟  			۱/۵
۱۰	الف) گراف P_{12} را رسم کنید. ب) یک $\gamma-$ مجموعه از آن را مشخص کنید.			۱
۱۱	می‌خواهیم ۱۰ نفر را که دوبه‌دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل‌شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟			۱
۱۲	تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+2x_2+x_3+x_4=20$ را با شرط‌های $x_2 \ge 4$، $x_3=3$ و $x_1>2$ به دست آورید.			۱/۵
۱۳	با ارقام ۳، ۱، ۲، ۳، ۱، ۲، ۴، ۳ و ۲ چند عدد ۱۰رقمی می‌توان نوشت؟ (محاسبهٔ جواب آخر الزامی نیست.)			۱
۱۴	قرار است سه کارگر با سه نوع ماشین نخ‌ریسی و سه نوع الیاف در سه روز اول هفته کار کنند. به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شود. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.			۱/۲۵
۱۵	تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ ۵عضوی A به مجموعهٔ ۳عضوی B را به دست آورید.			۱
۱۶	حداقل چند دانش‌آموز در حیاط یک دبیرستان حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۱ نفر از آن‌ها متعلق به یک پایهٔ تحصیلی (دهم، یازدهم، دوازدهم) و یک رشتهٔ تحصیلی (ریاضی، تجربی، انسانی) هستند؟			۱
	جمع نمرات			۲۰

۱. الف) نادرست — ب) نادرست — ج) درست — د) نادرست (هر مورد (۰/۲۵))

۲. الف) ۳ یا $\left[\frac{۷}{۳}\right]$ (۰/۲۵) — ب) ۶۰ یا $\frac{۵!}{۲!}$ (۰/۲۵)

۳.
$$a^۲+b^۲\ge ab+a-b-۱ \quad (۰/۲۵)$$
$$\Leftrightarrow ۲a^۲+۲b^۲-۲ab-۲a+۲b+۲\ge ۰ \quad (۰/۲۵)$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^۲+(a-۱)^۲+(b+۱)^۲\ge ۰ \quad (۰/۲۵)$$
این رابطه همواره برقرار است. (۰/۲۵)

۴.
$$a\,|\,۷k+۱ \Rightarrow a\,|\,۲۸k+۴ \quad (۰/۲۵)$$
$$a\,|\,۴k+۳ \Rightarrow a\,|\,۲۸k+۲۱ \quad (۰/۲۵)$$
$$a\,|\,۱۷(a\,|-۱۷) \ (۰/۲۵) \ \underline{a\in\mathbb{N}}\ a=۱ \text{ یا } a=۱۷ \ (۰/۲۵)$$

۵. روش اول:
$$\begin{matrix} a=۴q_۱+۲ \\ a=۵q_۲+۳ \end{matrix} \ (۰/۲۵) \Rightarrow \begin{matrix} ۵a=۲۰q_۱+۱۰ \ (۰/۲۵) \\ ۴a=۲۰q_۲+۱۲ \ (۰/۲۵) \end{matrix}$$
$$\Rightarrow a=۲۰(q_۱-q_۲)-۲ \quad (۰/۲۵)$$
$$a=۲۰q_۳+۱۸ \Rightarrow r=۱۸ \text{ یا } r=-۲+۲۰=۱۸ \quad (۰/۲۵)$$

روش دوم:
$$\begin{matrix} a\overset{۴}{\equiv}۲\overset{۴}{\equiv}۱۸ \\ a\overset{۵}{\equiv}۳\overset{۵}{\equiv}۱۸ \end{matrix} \ (۰/۲۵) \Rightarrow a=۴k+۱۸ \ (۰/۲۵)$$
$$\Rightarrow \underbrace{۴k+۱۸\overset{۵}{\equiv}۱۸}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{k=۵t}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow a=۲۰t+۱۸ \Rightarrow \underbrace{r=۱۸}_{(۰/۲۵)}$$

۶. روش اول:
$$۵x\overset{۹}{\equiv}۲۲ \ (۰/۲۵) \Rightarrow x\overset{۹}{\equiv}۸ \ (۰/۵) \Rightarrow x=۹k+۸ \ (۰/۲۵)$$
$$۵(۹k+۸)+۹y=۲۲ \ (۰/۲۵) \Rightarrow y=-۲-۵k \ (۰/۲۵)$$

روش دوم:
$$۹y\overset{۵}{\equiv}۲۲ \ (۰/۲۵) \Rightarrow y\overset{۵}{\equiv}۳ \ (۰/۵) \Rightarrow y=۵k+۳ \ (۰/۲۵)$$
$$۵x+۹(۵k+۳)=۲۲ \ (۰/۲۵) \Rightarrow x=-۱-۹k \ (۰/۲۵)$$

۷. الف) $p=۷$ (۰/۲۵) , $q=۱۰$ (۰/۲۵)

ب) cebagf یا ceabgf (۰/۵)

ج) ebgfe یا eagfe یا ebage یا eagbe (۰/۵)

د) خیر (۰/۲۵) زیرا رأس e در گراف G ماکزیمم درجه است؛ لذا درجهٔ آن در گراف $\bar{G}$ صفر می‌باشد. یا
$$\deg_{\bar{G}}(e)=p-۱=\Delta=۶ \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(e)=۰$$
$\Rightarrow$ $\bar{G}$ ناهمبند است. (۰/۲۵)

۸. الف) خیر (۰/۲۵) زیرا رأس d احاطه نمی‌شود.
یا $N_G[a]\cup N_G[b]\cup N_G[m]\ne V(G)$ (۰/۲۵)

ب) داریم $\gamma(G)\ge\left[\frac{۱۱}{۶}\right]=۲$ (۰/۵)

و از طرفی مجموعهٔ سه‌عضوی $\{a,m,d\}$ احاطه‌گر مینیمم می‌باشد. (۰/۲۵)
پس $\gamma(G)=۳$ (۰/۲۵)

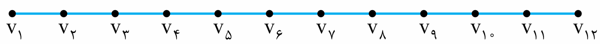
ج) $\{f,g,h,i,j\}$ (۰/۵)

۹. الف) $\{b,g,a,f\}$ (۰/۵)

ب) $\{c,e,h\}$ (۰/۵)

ج) ec یا eh یا gf یا gc (۰/۵)

۱۰. الف) رسم گراف (۰/۵)



ب) $\{v_۲,v_۵,v_۸,v_{۱۱}\}$ (۰/۵)

۱۱. روش اول:
$$\underbrace{۵\times۴\times۳\times۲\times۱\times(۲!)^۵}_{(۰/۷۵)}=۳۸۴۰ \ (۰/۲۵)$$

روش دوم:
$$\underbrace{(۱۰\times۱)\times(۸\times۱)\times(۶\times۱)\times(۴\times۱)\times(۲\times۱)}_{(۰/۷۵)}=۳۸۴۰ \ (۰/۲۵)$$

۱۲. روش اول:
$$x_۱+۲(۳)+x_۳+x_۴=۲۰ \Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۱۴ \ (۰/۲۵)$$
$$\underbrace{x_۱-۳}_{y_۱}\ge۰ \Rightarrow x_۱=y_۱+۳ \ , \ \underbrace{x_۳-۴}_{y_۳}\ge۰ \Rightarrow x_۳=y_۳+۴$$
$$\underbrace{y_۱+۳}_{(۰/۲۵)}+\underbrace{y_۳+۴}_{(۰/۲۵)}+x_۴=۱۴ \Rightarrow y_۱+y_۳+x_۴=۷ \ (۰/۲۵)$$
$$\Rightarrow \underbrace{\binom{۷+۳-۱}{۳-۱}}_{(۰/۲۵)}=\binom{۹}{۲}=۳۶ \ (۰/۲۵)$$

روش دوم:
$$x_۱+x_۳+x_۴=۱۴ \ (۰/۲۵)$$
$$\underbrace{\binom{۱۴-۳-۴+۳-۱}{۳-۱}}_{(۰/۷۵)}=\underbrace{\binom{۹}{۲}}_{(۰/۲۵)}=۳۶ \ (۰/۲۵)$$

۱۳.
$$\frac{۱۰! \ (۰/۲۵)}{\underset{(۰/۲۵)}{۲!}\times\underset{(۰/۲۵)}{۳!}\times\underset{(۰/۲۵)}{۴!}}$$

۱۴.

$A=$ (۰/۲۵)

	$w_۱$	$w_۲$	$w_۳$
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

$B=$ (۰/۲۵)

	$w_۱$	$w_۲$	$w_۳$
شنبه	۳	۱	۲
یکشنبه	۱	۲	۳
دوشنبه	۲	۳	۱

$\Rightarrow$ (۰/۵)

	$w_۱$	$w_۲$	$w_۳$
شنبه	۱۳	۲۱	۳۲
یکشنبه	۳۱	۱۲	۲۳
دوشنبه	۲۲	۳۳	۱۱

چون اعداد دورقمی تکراری در مربع ساخته‌شده وجود ندارد؛ پس متعامدند. (۰/۲۵)

۱۵.
$$\underset{(۰/۲۵)}{۳^۵}-(\underset{(۰/۲۵)}{۳\times۲^۵}-\underset{(۰/۲۵)}{۳})=۱۵۰ \ (۰/۲۵)$$

۱۶. تعداد لانه: $n=۳\times۳=۹$ (۰/۲۵)
$$k+۱=۲۱ \Rightarrow k=۲۰ \ (۰/۲۵)$$
تعداد کبوترها: $kn+۱=۲۰\times۹+۱=۱۸۱$ (۰/۵)